MATRICES Y DETERMINANTES

Teoría 1

NOCIONES BÁSICAS

Las matrices aparecen como consecuencia de ordenar los números en forma de filas y columnas. Las líneas horizontales se llaman filas, mientras que las líneas verticales se llaman columnas.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \rightarrow \text{fila 1} \\ \end{array}$$

$\downarrow$ columna 2

Para nombrarlas, se utilizan letras mayúsculas: matriz A, matriz B, etc.

Dimensión u orden de una matriz: es el número de filas y columnas que tiene la matriz (se indica primero el número de filas). Ejemplos:

$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ Dimensión (3 x 2) o también (3,2).

$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ Dimensión (1x 4) o (1,4).

Para referirnos a un elemento de una matriz, lo hacemos con la misma letra con la que se nombra a la matriz, pero en minúscula, indicando con subíndices la fila y la columna donde se encuentra como se ve en el ejemplo:

$M = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 7 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & -6 & 8 \end{pmatrix}$ $m_{11} = 2$; $m_{12} = -5$; $m_{32} = -6$, etc.

Podemos clasificar las matrices en dos grandes grupos:

a) **Matrices rectangulares**: son aquellas en las que el número de filas es distinto al número de columnas.
b) **Matrices cuadradas**: son aquellas en las que el número de filas es igual al número de columnas. En las matrices cuadradas, en lugar de decir que la dimensión de la matriz es (3 x 3), se dice que tenemos una matriz de orden 3.

Matriz traspuesta de otra matriz A:

Se nombra A^t y es aquella matriz que tiene como filas las columnas de la matriz A (luego tendrá como columnas las filas de la matriz A). Ejemplo:

$B = \begin{pmatrix} 1 & -6 & 5 & 8 \\ 2 & -5 & 3 & 0 \end{pmatrix}$; $B^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -6 & -5 \\ 5 & 3 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}$

MATRICES Y DETERMINANTES

Teoría 2

OPERACIONES CON MATRICES

a) **Suma (resta)**: para que dos matrices sean sumables, tienen que tener la misma dimensión. La suma de dos matrices es otra matriz de la misma dimensión cuyos elementos se obtienen sumando los elementos de las dos matrices que ocupan el mismo lugar. Ejemplos:

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 6 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}}_{(3\times 2)} ; \quad B = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -2 & -8 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}}_{(3\times 2)}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 1+2 & -2+(-3) \\ 5+(-2) & 6+(-8) \\ -3+4 & -4+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 3 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A - B = \begin{pmatrix} 1-2 & -2-(-3) \\ 5-(-2) & 6-(-8) \\ -3-4 & -4-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 7 & 14 \\ -7 & -6 \end{pmatrix}$$

b) **Producto de una matriz por un número**: el producto de una matriz por un número es otra matriz de la misma dimensión que se obtiene multiplicando todos los elementos de la matriz por dicho número. Ejemplos:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 5 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$5\cdot A = \begin{pmatrix} 10 & -5 & 20 \\ 25 & 0 & 15 \end{pmatrix}; \quad \frac{A}{2} = \frac{1}{2}\cdot A = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 2 \\ 5/2 & 0 & 3/2 \end{pmatrix}$$

MATRICES Y DETERMINANTES

Teoría 3

c) **Producto de matrices**:

- Para que dos matrices puedan multiplicarse, el número de columnas de la matriz de la izquierda tiene que ser igual al número de filas de la matriz de la derecha.
- El producto de dos matrices es otra matriz que tiene igual número de filas que la matriz de la izquierda e igual número de columnas que la matriz de la derecha.
- El producto de matrices no es conmutativo ($A \cdot B \neq B \cdot A$).
- Para realizar el producto de dos matrices, **se multiplican las filas de la matriz de la izquierda por las columnas de la matriz de la derecha** como se ve en los siguientes ejemplos:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}; \; B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Dimensión de A = (2 x 2) ; dimensión de B = (2 x 3)

2 = 2 , se puede realizar el producto A·B, ya que el número de columnas de la matriz de la izquierda coincide con el número de filas de la matriz de la derecha. No se puede realizar el producto B·A, ya que el numero de columnas de la matriz B (3) es distinto que el número de filas de la matriz A (2).

La dimensión de la matriz A·B será (2 x 3).

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \cdot C_1 & F_1 \cdot C_2 & F_1 \cdot C_3 \\ F_2 \cdot C_1 & F_2 \cdot C_2 & F_2 \cdot C_3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 4 \cdot 1 + 7 \cdot 4 & 4 \cdot 2 + 7 \cdot 5 & 4 \cdot 3 + 7 \cdot 6 \\ 3 \cdot 1 + 8 \cdot 4 & 3 \cdot 2 + 8 \cdot 5 & 3 \cdot 3 + 8 \cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 & 43 & 54 \\ 35 & 46 & 57 \end{pmatrix}$$

MATRICES Y DETERMINANTES

Teoría 4

d) **<u>Elevar una matriz a un número</u>**: para elevar una matriz a un número, se multiplica la matriz por si misma tantas veces como indique el exponente. Solo puede hacerse esta operación en matrices cuadradas. <u>Ejemplo</u>:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A \cdot A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 37 & 54 \\ 81 & 118 \end{pmatrix}$$

Matrices cuadradas:

diagonal secundaria

$$\begin{pmatrix} -2 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 2 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

diagonal principal

Matriz unidad o identidad (I): es aquella que tiene todos sus elementos nulos, excepto los de la diagonal principal que son unos.

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};\ I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot I = A$$

$$I \cdot A = A$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot I = \underset{(3 \times 2)}{\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

MATRICES Y DETERMINANTES

Ejercicio 1

1. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 3 & 2 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$, calcular:

   a) 2A + 3B

   b) $-3A^t - B^t$

a) $2A = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 10 & -2 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$

$3B = \begin{pmatrix} -3 & 15 \\ 9 & 6 \\ -12 & 0 \end{pmatrix}$

$$\boxed{2A + 3B = \begin{pmatrix} 1 & 21 \\ 19 & 4 \\ -12 & 8 \end{pmatrix}}$$

b) $A^t = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix} \longrightarrow -3A^t = \begin{pmatrix} -6 & -15 & 0 \\ -9 & 3 & -12 \end{pmatrix}$

$B^t = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -4 \\ 5 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

$$\boxed{-3A^t - B^t = \begin{pmatrix} -5 & -18 & 4 \\ -14 & 1 & -12 \end{pmatrix}}$$

MATRICES Y DETERMINANTES

Ejercicio 2

2. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & -4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$, realizar todos los productos que sean posibles.

$A\,(4\times 1)$

$B\,(1\times 3)$

$C\,(3\times 2)$

$D\,(2\times 4)$

$A\cdot A$	$B\cdot A$	$C\cdot A$	$D\cdot A$
$A\cdot B$	$B\cdot B$	$C\cdot B$	$D\cdot B$
$A\cdot C$	$B\cdot C$	$C\cdot C$	$D\cdot C$
$A\cdot D$	$B\cdot D$	$C\cdot D$	$D\cdot D$

$$A\cdot B = \underset{(4\times 1)}{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}} \cdot \underset{(1\times 3)}{\begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \end{pmatrix}} = \underset{(4\times 3)}{\begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ -1 & 3 & -5 \\ 2 & -6 & 10 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

$$B\cdot C = \underset{(1\times 3)}{\begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \end{pmatrix}} \underset{(3\times 2)}{\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}} = \underset{(1\times 2)}{\begin{pmatrix} 20 & 25 \end{pmatrix}}$$

$$C\cdot D = \underset{(3\times 2)}{\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}} \underset{(2\times 4)}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & -4 & 5 & 2 \end{pmatrix}} = \underset{(3\times 4)}{\begin{pmatrix} 17 & -16 & 23 & 10 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \\ 15 & -10 & 17 & 8 \end{pmatrix}}$$

$$D\cdot A = \underset{(2\times 4)}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & -4 & 5 & 2 \end{pmatrix}} \underset{(4\times 1)}{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}} = \underset{(2\times 1)}{\begin{pmatrix} -3 \\ 17 \end{pmatrix}}$$

MATRICES Y DETERMINANTES

Ejercicio 3

Calcular $X^2 - 7X + 7I$ si $X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$X^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 7 \\ 21 & 28 \end{pmatrix}$$

$$7X = \begin{pmatrix} 14 & 7 \\ 21 & 35 \end{pmatrix}$$

$$7I = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\underline{X^2 - 7X + 7I} = \begin{pmatrix} 7 & 7 \\ 21 & 28 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 14 & 7 \\ 21 & 35 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} =$$

$$= \underline{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

MATRICES Y DETERMINANTES

Ejercicio 4

4. Sea la matriz $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calcular M^{30}.

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I$$

$$\underline{M^{30}} = (M^2)^{15} = (-I)^{15} = (-1 \cdot I)^{15} = (-1)^{15} \cdot I^{15} = -1 \cdot I = -I = \underline{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}$$

MATRICES Y DETERMINANTES

Teoría 5

DETERMINANTES

El determinante de una matriz cuadrada, es un número asociado a la matriz.

Solo tienen determinantes las matrices cuadradas.

Notación: |A| = determinante de la matriz A.

Ejemplo:

Matriz A = $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; Determinante de A: |A| = $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$

CÁLCULO DE DETERMINANTES

1) **De orden 2**: el determinante se obtiene como diferencia entre el producto de los elementos de la diagonal principal menos el producto de los elementos de la diagonal secundaria. Ejemplo:

$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = 1\cdot 4 - (-3)\cdot 2 = 4 - (-6) = 10$

2) **De orden 3**: dos métodos:

- **Método de Sarrus**: se obtiene el determinante como suma de 3 productos positivos menos 3 productos negativos como se ve en el ejemplo:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 7 & 3 \\ -2 & -8 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 7 & 3 \\ -2 & -8 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 7 & 3 \\ -2 & -8 & 1 \end{vmatrix} =$$

$= 2\cdot 7\cdot 1 + 3\cdot 3\cdot(-2) + 4\cdot(-8)\cdot 5 - [(-2)\cdot 7\cdot 5 + 4\cdot 3\cdot 1 + (-8)\cdot 3\cdot 2] = 14 - 18 - 160 + 70 - 12 + 48 = -58$

- **Método del pivote**: Consiste en anular todos los elementos de una línea aplicando la propiedad número 5 y, a continuación, desarrollar el determinante por dicha línea. Ejemplo:

Teoría 6

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \\ 2 & -3 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 13 \end{vmatrix}$$, $C_3' = C_3 + 4 \cdot C_1$(propiedad 5).

2 + 3 = 5 (I)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 13 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ -3 & 13 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 13 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 13 - (-3) \cdot 7 = 26 + 21 = 47$$

2 + 1 = 3 (I) 2 + 2 = 4 (P)

Calcular el determinante de la siguiente matriz

Ejercicio 5

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & 3 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|A| = 1\cdot 4\cdot 1 + 2\cdot 3\cdot(-1) + 2\cdot(-3)\cdot(-3) - \left[-1\cdot 4\cdot(-3) + 2\cdot 2\cdot 1 + (-3)\cdot 3\cdot 1\right] =$$

$$= 4 - 6 + 18 - (12 + 4 - 9) = 16 - 7 = 9$$

Calcular el determinante de la siguiente matriz

Ejercicio 6

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & 3 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & 3 \\ -1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 9 \\ -1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 9 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (0-(-9)) = 9$$

$C_2 + C_1(-2)$

$C_3 + C_1(3)$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & 3 \\ -1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -7 & 0 \\ 5 & 13 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-26-(-35)) = 9$$

$F_2 + F_3(-3)$

$F_1 + F_3(3)$

MATRICES Y DETERMINANTES

Ejercicio 7

Calcular el determinante de la siguiente matriz:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ 4 & -5 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ 4 & -5 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & -2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 5 & 5 & 2 & 2 \\ 6 & -2 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & -2 & 5 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 5 & 2 \\ 6 & -2 & 3 \\ -1 & -4 & 5 \end{vmatrix} =$$

$c_1 + c_3(2)$

$c_2 + c_3(3)$

$c_2 + c_1(-4)$

$c_3 + c_1(5)$

$$= -1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & -15 & 27 \\ 6 & -26 & 33 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)\cdot(-1)\left[-15 \cdot 33 - (-26)\cdot 27\right] = \underline{\underline{207}}$$

MATRICES Y DETERMINANTES

Teoría 7

Propiedades:

1) Si los elementos de una línea (fila o columna) son todos nulos, el determinante vale cero. Ejemplo:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 0, \text{ ya que } C_3=0$$

2) Si en un determinante, tenemos dos líneas paralelas iguales, el determinante vale cero. Ejemplo:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0, \text{ ya que } F_1=F_3$$

3) Si en un determinante, tenemos dos líneas paralelas proporcionales, el determinante vale cero. Ejemplo:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 0, \text{ ya que } F_3=2\cdot F_1$$

4) Si en un determinante, una de sus líneas es combinación lineal de las otras, el determinante vale cero. Ejemplo:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & -4 \\ -3 & -13 & 14 \end{vmatrix} = 0, \text{ ya que } F_3= 3\cdot F_1 - 2\cdot F_2$$

(-3 -13 14) = 3·(1 -1 2) – 2·(3 5 -4)

De forma general, se puede expresar que una línea (por ejemplo, la fila 3) es combinación lineal de las demás de la siguiente forma:

$\boxed{F_3= \alpha\cdot F_1 + \beta\cdot F_2}$, donde α y β pueden ser cualquier número real (incluido el cero)

MATRICES Y DETERMINANTES

Teoría 8

5) Si en un determinante sustituimos una de sus líneas por una combinación lineal de las otras, el determinante no varía. Ejemplo:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ -6 & -8 & -11 \end{vmatrix}$$, ya que $F_3' = F_3 + 2 \cdot F_1 - 3 \cdot F_2$

$(-6\ \ -8\ \ -11) = (-2\ \ 3\ \ 1) + 2 \cdot (1\ \ -1\ \ 0) - 3 \cdot (2\ \ 3\ \ 4)$

En general:

$\boxed{F_3' = F_3 + \alpha \cdot F_1 + \beta \cdot F_2}$

Importante: la antigua fila 3 (F_3) no puede multiplicarse por ningún número. α y β pueden ser cualquier número real (incluido el cero).

6) Si en un determinante cambiamos dos líneas paralelas de orden, el determinante cambia de signo. Ejemplo:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix}$$, ya que $C_1 \leftrightarrow C_3$

MATRICES Y DETERMINANTES

Teoría 9

7) $|A^t| = |A|$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

8) Si en una línea los elementos están compuestos por una suma de dos sumandos, el determinante se puede descomponer en la suma de dos determinantes como se indica en el ejemplo:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1+3 & 0 \\ 2 & 3-5 & 4 \\ -2 & 3+7 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & -5 & 4 \\ -2 & 7 & 1 \end{vmatrix}$$

9) El determinante del producto de dos matrices es igual al producto de los determinantes (A y B son matrices cuadradas):

$|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$

10) Producto de un número por un determinante: para multiplicar un número por un determinante, multiplicamos dicho número por una cualquiera de las líneas del determinante (SOLO por una de ellas). Ejemplo:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 5-(-2) = 7 \Rightarrow 2 \cdot |A| = 2 \cdot 7 = 14$$

$$2 \cdot |A| = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 10-(-4) = 14$$

$$2 \cdot |A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 10-(-4) = 14$$

MATRICES Y DETERMINANTES

Ejercicio 8

Ejercicio 3. Calificación máxima: 2 puntos.

Sabiendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 3$ y usando las propiedades de los determinantes, calcular el valor de los siguientes determinantes:

a)(1 punto) $\begin{vmatrix} 2a-2b & c & 5b \\ 2d-2e & f & 5e \\ -2 & 3 & 10 \end{vmatrix}$ b)(1 punto) $\begin{vmatrix} a-1 & b-2 & 2c-6 \\ 2 & 4 & 12 \\ d & e & 2f \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 2a-2b & c & 5b \\ 2d-2e & f & 5e \\ -2 & 3 & 10 \end{vmatrix} \underset{\substack{C_1:2 \\ C_3:5}}{=} 2\cdot5\cdot\begin{vmatrix} a-b & c & b \\ d-e & f & e \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} \underset{C_1+C_3}{=} 10\cdot\begin{vmatrix} a & c & b \\ d & f & e \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} \underset{C_2 \leftrightarrow C_3}{=}$

$= -10\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -10\cdot3 = \underline{-30}$

b) $\begin{vmatrix} a-1 & b-2 & 2c-6 \\ 2 & 4 & 12 \\ d & e & 2f \end{vmatrix} \underset{C_3:2}{=} 2\cdot\begin{vmatrix} a-1 & b-2 & c-3 \\ 2 & 4 & 6 \\ d & e & f \end{vmatrix} \underset{F_2:2}{=}$

$= 2\cdot2\cdot\begin{vmatrix} a-1 & b-2 & c-3 \\ 1 & 2 & 3 \\ d & e & f \end{vmatrix} \underset{F_1+F_2}{=} 4\cdot\begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 2 & 3 \\ d & e & f \end{vmatrix} \underset{F_2 \leftrightarrow F_3}{=} -4\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} =$

$= -4\cdot3 = \underline{-12}$

MATRICES Y DETERMINANTES

Ejercicio 9

Ejercicio 1. **Calificación máxima:** 3 puntos.

Sabiendo que $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 0 & 3 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} = 3$, y utilizando las propiedades de los determinantes, calcular:

a) (1 punto) El determinante de la matriz $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 6 & 0 & 3 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix}^4$,

b) (1 punto) $\begin{vmatrix} 10 & 20 & 30 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3\alpha & 3\beta & 3\gamma \end{vmatrix}$, c) (1 punto) $\begin{vmatrix} 3\alpha+2 & 3\beta+4 & 3\gamma+6 \\ 2\alpha & 2\beta & 2\gamma \\ \alpha+6 & \beta & \gamma+3 \end{vmatrix}$.

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 6 & 0 & 3 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix}$ $|A^4| = |A \cdot A \cdot A \cdot A| = |A| \cdot |A| \cdot |A| \cdot |A| = |A|^4$

$|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 6 & 0 & 3 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 0 & 3 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 = 6$$

$F_1 : 2$

$$|A^4| = |A|^4 = 6^4 = \underline{1296}$$

b) $$\begin{vmatrix} 10 & 20 & 30 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3\alpha & 3\beta & 3\gamma \end{vmatrix} = 10 \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} = 10 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 0 & 3 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} = 10 \cdot 3 = \underline{30}$$

$F_1 : 10$

$F_3 : 3$

c) $$\begin{vmatrix} 3\alpha+2 & 3\beta+4 & 3\gamma+6 \\ 2\alpha & 2\beta & 2\gamma \\ \alpha+6 & \beta & \gamma+3 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 3\alpha+2 & 3\beta+4 & 3\gamma+6 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha+6 & \beta & \gamma+3 \end{vmatrix} =$$

$F_2 : 2$

$F_1 + F_2(-3)$

$F_3 + F_2(-1)$

$$= 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ 6 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ 6 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 0 & 3 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} =$$

$F_1 : 2$

$F_2 \leftrightarrow F_3$

$$= -4 \cdot 3 = \underline{-12}$$

MATRICES Y DETERMINANTES

Teoría 10

MATRIZ INVERSA DE UNA MATRIZ A (solo matrices cuadradas)

Notación: A^{-1}: matriz inversa de la matriz A

La matriz inversa de la matriz A es aquella matriz que cumple: $\boxed{A\cdot A^{-1}= A^{-1}\cdot A=I}$ siendo I la matriz unidad o identidad. Recordar que no todas las matrices cuadradas tienen inversa, para que una matriz cuadrada tenga inversa, su determinante ha de ser distinto de cero (matriz regular).

Cálculo de la matriz inversa por el método de los adjuntos:

Se aplica la siguiente fórmula: $\boxed{A^{-1}= \dfrac{(Adj\ A)^t}{|A|}}$

El adjunto de un elemento es el menor complementario del mismo, si la suma de su fila y su columna es par y es el opuesto de su menor complementario, si la suma de su fila y su columna es impar. Al adjunto del elemento a_{ij} se le llama A_{ij}.

$$\boxed{A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \alpha_{ij}}$$

Ejemplo:

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$, calcular el adjunto del elemento a_{23}.

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \cancel{4} & \cancel{5} & \cancel{6} \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$, luego $A_{23} =(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = -(-6) = 6$

MATRIZ ADJUNTA DE UNA MATRIZ A

Notación: Adj A: matriz adjunta de la matriz A

La matriz adjunta de una matriz dada A, es la matriz formada por los adjuntos de los elementos de la matriz A.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$; $A_{11} = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = -3$, $A_{12} = -\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = 6$, $A_{13} = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = -3$,

$A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = 6$, $A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = -12$, $A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 6$, $A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -3$,

$A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 6$, $A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -3$. Luego:

$$Adj\ A = \begin{pmatrix} -3 & 6 & -3 \\ 6 & -12 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix}$$

MATRICES Y DETERMINANTES

Ejercicio 10

6. Calcular la matriz inversa de la matriz $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$

$$\boxed{A^{-1} = \frac{(Adj\ A)'}{|A|}}$$

a) cálculo de $|A|$

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 7 = -1 \neq 0 \longrightarrow \exists A^{-1}$$

b) $\text{Adj} A = \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

c) $\underline{A^{-1}} = \dfrac{\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -7 & 3 \end{pmatrix}}{-1} = \underline{\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 7 & -3 \end{pmatrix}}$

d) comprobación:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 7 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \checkmark$$

MATRICES Y DETERMINANTES

Ejercicio 11

7. Hallar la matriz inversa de la matriz A = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$\boxed{A^{-1} = \frac{(Adj\ A)^t}{|A|}}$$

$|A| = 6 + 4 - (1) = 9$

$A_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5$

$A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -4$

$$Adj\ A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -6 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(Adj\ A)^t = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -6 \\ -4 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} 5/9 & 2/9 & -2/3 \\ -4/9 & 2/9 & 1/3 \\ 2/9 & -1/9 & 1/3 \end{pmatrix}}$$

Comprobación:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5/9 & 2/9 & -2/3 \\ -4/9 & 2/9 & 1/3 \\ 2/9 & -1/9 & 1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

MATRICES Y DETERMINANTES

Teoría 11

ECUACIONES MATRICIALES

Son análogas a las ecuaciones ordinarias de primer grado, pero aquí los datos y las incógnitas son matrices. Se resuelven análogamente a las ecuaciones de primer grado, excepto cuando hay que dividir, ya que en matrices no existe la división. Ejemplo:
Resolver la ecuación matricial: $A \cdot X + B = C$, donde A, B y C son matrices conocidas y X es la matriz que queremos calcular.

Al igual que en las ecuaciones ordinarias, cuando queremos despejar la incógnita, la dejamos sola en un miembro. Pues aquí hacemos lo mismo, pasamos la matriz B al otro miembro (pasará restando):

$A \cdot X = C - B$

Si fuera una ecuación de primer grado, ahora pasaríamos la A dividiendo y ya tendríamos despejada la X, pero aquí no podemos porque no existe la división de matrices. Para salvar esto, multiplicamos los dos miembros por la izquierda (recordar que el producto de matrices no es conmutativo) por la inversa de la matriz A:

$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot (C - B)$

Sabemos que $A^{-1} \cdot A = I$, luego:

$I \cdot X = A^{-1} \cdot (C - B)$

y como $I \cdot X = X$, nos queda que:

$X = A^{-1} \cdot (C - B)$

Consideraciones:

- Resolución análoga a las ecuaciones de primer grado hasta que hay que dividir
- Tiene que existir la matriz por la que multiplicamos los dos miembros
- No siempre se puede despejar la matriz incógnita (en este caso realizamos las operaciones que se indican, llegando a una igualdad de matrices que nos da lugar a un sistema de ecuaciones)

MATRICES Y DETERMINANTES

Ejercicio 12

Dadas las matrices A = $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ y B = $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, resolver la ecuación matricial

A·X + X = B

$\underbrace{(A+1)}_{\text{NO TIENE SENTIDO}} X = B$

Esta ecuación matricial es igual que esta otra:

A·X + I·X = B, ya que I·X = X

Sacamos factor común en el primer miembro:

(A + I)·X = B

y multiplicamos por la inversa de la matriz (A + I):

$(A+I)^{-1}\cdot(A+I)\cdot X = (A+I)^{-1}\cdot B \Rightarrow I\cdot X = (A+I)^{-1}\cdot B \Rightarrow X = (A+I)^{-1}\cdot B$

Por tanto:

$A + I = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

$|A+I| = 3\cdot 4 - 1\cdot 5 = 7$

$\mathrm{Adj}(A+I) = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow (\mathrm{Adj}(A+I))^t = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, luego:

$(A+I)^{-1} = \frac{1}{7}\cdot\begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, por tanto:

$$X = \frac{1}{7}\cdot\begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\cdot\begin{pmatrix} -4 & -5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{7} & -\frac{5}{7} \\ \frac{1}{7} & \frac{3}{7} \end{pmatrix}$$

MATRICES Y DETERMINANTES

Ejercicio 13

Ejercicio 4. Calificación máxima: 2 puntos.

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, hallar todas las matrices $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ que conmutan con A, es decir que cumplen $AB = BA$.

$$AB - BA = 0 \quad \boxed{\begin{cases} B(A-A) = 0 \\ (A-A)B = 0 \end{cases}} \longrightarrow \text{NO SE PUEDE}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a+c & 3b+d \\ a & b \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a+b & a \\ 3c+d & c \end{pmatrix}$$

$$AB = B \cdot A \longrightarrow \begin{cases} 3a+c = 3a+b \\ 3b+d = a \\ a = 3c+d \\ b = c \end{cases} \begin{array}{l} \longrightarrow b = c \\ \longrightarrow d = a-3b = a-3c \end{array}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} b = c \\ d = a-3c \end{array}}$$

$$\boxed{B = \begin{pmatrix} a & c \\ c & a-3c \end{pmatrix} \quad \forall a, c \in \mathbb{R}}$$

$$\left.\begin{array}{l} a = 2 \\ c = 1 \end{array}\right\} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \checkmark$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

MATRICES Y DETERMINANTES

Teoría 12

MENOR DE UNA MATRIZ

Es cualquier determinante que obtengamos de una matriz suprimiendo las filas y columnas que queramos. Ejemplos:

Dada la matriz A = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 8 & 2 \end{vmatrix}$ es un menor de orden 2 de la matriz A que se obtiene eliminando las filas 1 y 3 y las columnas 1,3 y 4.

A = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$ es otro menor de la matriz A que se obtiene eliminando la fila 4 y las columnas 4 y 5.

RANGO DE UNA MATRIZ

Se llama **rango** de una matriz al **orden** del mayor menor no nulo. Ejemplo:

A = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Esta matriz es de dimensión (4 x 5). Esto quiere decir que el rango de esta matriz estará comprendido entre 1 y 4 (ya que no podemos formar determinantes de orden 5 al ser 4 el número de filas). Si encontramos un menor de orden 1 distinto de cero, el rango de la matriz será mayor o igual que 1. Si encontramos un menor distinto de cero de orden 2, el rango será mayor o igual que 2. Y así sucesivamente.

MATRICES Y DETERMINANTES

Teoría 13

Método general para calcular el rango de una matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} \neq 0 \longrightarrow R(A) \geq 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \longrightarrow \boxed{R(A) = 3}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0 \longrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 6 & 8 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 6 & 8 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \longrightarrow \boxed{R(A) = 3}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 6 & 8 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \longrightarrow$$ Eliminamos fila 3 (ya que es combinación lineal de las otras)

$$\downarrow$$

$$\boxed{R(A) = 2}$$

Reglas generales para el cálculo del rango de una matriz:

1) Si en una línea todos los elementos son nulos, podemos eliminar dicha línea para el cálculo del rango.
2) Si una línea es igual o proporcional a otra (paralela), podemos eliminarla para el cálculo del rango.
3) Si una línea es combinación lineal de las otras, podemos eliminarla para el cálculo del rango.

MATRICES Y DETERMINANTES

Ejercicio 14

Ejemplo: calcular el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & -1 & -2 & -3 \\ 5 & 3 & 6 & 7 \end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 8 = -3 \neq 0 \Rightarrow Rg(A) \geq 2$. Ahora orlamos este menor para convertirlo en uno de orden 3 con la siguiente fila:

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & -1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 2 & 0 \\ 19 & 5 & -4 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 7 & 0 \\ 19 & -4 \end{vmatrix} = -28 \neq 0 \Rightarrow Rg(A) \geq 3$. A continuación, orlamos este menor hasta convertirlo en uno de orden 4. Solo tenemos una posibilidad:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & -1 & -2 & -3 \\ 5 & 3 & 6 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & \cancel{2} & 0 & -1 \\ 19 & \cancel{5} & -4 & -8 \\ \cancel{0} & -1 & \cancel{0} & \cancel{0} \\ 14 & \cancel{3} & 0 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 7 & \cancel{0} & -1 \\ \cancel{19} & -4 & \cancel{-8} \\ 14 & \cancel{0} & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-4) \cdot \begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 14 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

Rg(A) = 3, ya que hemos encontrado un menor de orden 3 que no es cero y el único menor de orden 4 que podemos formar es igual a cero.

MATRICES Y DETERMINANTES

Ejercicio 15

21. Calcular el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 & 4 \\ -2 & -4 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 10 & -3 & 11 \\ -2 & -4 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

(4×5)

$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \longrightarrow R(A) \geq 2$

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 7 \\ 1 & 2 & 10 \end{vmatrix} = -7 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$

$F_2 + F_1(2)$

$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ -4 & 1 & 3 \\ 2 & 10 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 0 & 7 & -1 \\ 0 & 7 & -1 \end{vmatrix} = 0 \ (F_2 = F_3)$

$F_2 + F_1(2)$

$F_3 + F_1(-1)$

Eliminamos la fila 3 puesto que es combinación lineal de las filas 1 y 2.

$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -4 & 1 & -1 \\ 2 & 10 & 11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 7 & 7 \\ 0 & 7 & 7 \end{vmatrix} = 0 \ (F_2 = F_3)$

$F_2 + F_1(2)$

$F_3 + F_1(-1)$

$: A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 & 4 \\ -2 & -4 & 1 & 3 & -1 \\ \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{10} & \cancel{-3} & \cancel{11} \\ -2 & -4 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -4 & 1 \\ -2 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \ (C_2 = 2C_1)$

$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ -4 & 1 & 3 \\ -4 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \\ -4 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \longrightarrow \boxed{R(A) = 3}$

$F_2 + F_3(-1)$

MATRICES Y DETERMINANTES

Ejercicio 16

22. Estudiar el rango de la matriz A = $\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 2 & a & 0 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}$ para los distintos valores del parámetro.

(3×3)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 2 & a & 0 \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix} \underset{c_1+c_2+c_3}{=} \begin{vmatrix} 2+a & 1 & a \\ 2+a & a & 0 \\ 2+a & 1 & 1 \end{vmatrix} \underset{c_1:(2+a)}{=} (2+a)\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \underset{F_3+F_1(-1)}{=} (2+a)\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1-a \end{vmatrix} =$$

$$= (2+a)(1-a)(a-1) = -(2+a)(1-a)^2 = 0 \quad \begin{cases} a=-2 \\ a=1 \end{cases}$$

$$\boxed{\forall a \in \mathbb{R}-\{-2,1\},\ |A| \neq 0 \longrightarrow R(A)=3}$$

Si $a=-2$, $R(A)<3$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \longrightarrow R(A)=2$$

Si $a=1$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ \cancel{1} & \cancel{1} & \cancel{1} \end{pmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \longrightarrow R(A)=2$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \forall a \in \mathbb{R}-\{-2,1\},\ |A| \neq 0 \longrightarrow R(A)=3 \\ \text{Si } a=-2 \text{ ó } 1 \longrightarrow R(A)=2 \end{array}}$$

MATRICES Y DETERMINANTES Teoría 14

Sistemas de Ecuaciones Matriciales

$$\begin{cases} 2X + 3Y = A & (2) \\ X - 2Y = B \quad (-2) & (3) \end{cases}$$

$$7Y = A - 2B \longrightarrow \boxed{Y = \frac{A - 2B}{7}}$$

$$7X = 2A + 3B \longrightarrow \boxed{X = \frac{2A + 3B}{7}}$$

$$X = B + 2Y$$

MATRICES Y DETERMINANTES

Ejercicio 17

28. Resolver: $\begin{cases} 2A+B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ A-3B=\begin{pmatrix} -4 & -3 & -2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{cases}$

$C=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$D=\begin{pmatrix} -4 & -3 & -2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} 2A+B=C & (3) \\ A-3B=D & (-2) \end{cases}$

$7A=3C+D \longrightarrow \boxed{A=\dfrac{3C+D}{7}}$

$7B=C-2D \longrightarrow \boxed{B=\dfrac{C-2D}{7}}$

$$A=\frac{\begin{pmatrix} 3 & 6 & 6 \\ -6 & 3 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -4 & -3 & -2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}}{7}=\frac{\begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ -7 & 3 & -1 \end{pmatrix}}{7}=\begin{pmatrix} -1/7 & 3/7 & 4/7 \\ -1 & 3/7 & -1/7 \end{pmatrix}$$

$$B=\frac{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -8 & -6 & -4 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}}{7}=\frac{\begin{pmatrix} 9 & 8 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}}{7}=\begin{pmatrix} 9/7 & 8/7 & 6/7 \\ 0 & 1/7 & 2/7 \end{pmatrix}$$